E.N.S. FONTENAY – SAINT CLOUD

Option Sciences Physiques

Mathématiques I

Durée : 4 heures

Sauf indications contraires indiquées dans le texte, toutes les fonctions et toutes les fonctions coefficients d'équations différentielles ou de matrices considérées dans le problème sont définies, continues et dérivables sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On notera $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels.

N.B. — *La rigueur des démonstrations ainsi que leur rédaction seront des éléments d'appréciation.*

Le jury attachera beaucoup d'importance à la résolution effective des exemples.

I

On considère l'équation linéaire du second ordre :

$$(E) \qquad x'' + a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$$

On appellera solution de (E), toute fonction φ définie, continue, deux fois dérivable sur I, à valeurs réelles et vérifiant, pour tout t de I,

$$\varphi''(t) + a(t)\,\varphi'(t) + b(t)\,\varphi(t) = 0$$

1° On suppose que (E) admet deux solutions linéairement indépendantes φ_1 et φ_2 telles que $\varphi_1^2 + \varphi_2^2$ soit constant. Montrer que les fonctions a et b sont liées par la relation (G) :

$$(G) \qquad b'(t) + 2\,a(t)\,b(t) = 0$$

2° On suppose que a et b sont liées par la relation (G) et que $b > 0$. Montrer que (E) admet deux solutions linéairement indépendantes φ_1 et φ_2 telles que $\varphi_1^2 + \varphi_2^2$ soit constant.

3° Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$x'' \cos t + x' \sin t + \frac{\pi^2}{4}\,x \cos^3 t = 0$$

$\left(\text{On pourra d'abord se borner à l'intervalle } \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Déterminer une solution φ vérifiant $\varphi(0) = \frac{1}{2}$ et $\varphi'(0) = \frac{\pi}{4}$.

Tracer son graphe dans $\mathbb{R}$.

II

On considère un système différentiel linéaire du premier ordre :

$$(S) \qquad \begin{cases} x_1' = a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + \ldots + a_{1n}(t)\,x_n \\ x_i' = a_{i1}(t)\,x_1 + a_{i2}(t)\,x_2 + \ldots + a_{in}(t)\,x_n \\ x_n' = a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)\,x_2 + \ldots + a_{nn}(t)\,x_n \end{cases}$$

que l'on notera $x' = A(t) \cdot x$ où $A(t)$ est la matrice de terme général $a_{ij}(t)$. On appellera solution du système (S), toute fonction φ définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de composantes φ_i continues, dérivables sur I et vérifiant pour tout t de I et tout $i \leqslant n$:

$$\varphi_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,\varphi_j(t)$$

On admettra que, si $\alpha \in \mathbb{R}^n$, si $t_0 \in I$, il existe une solution et une seule φ telle que $\varphi(t_0) = \alpha$.

1° Montrer que, si φ est une solution de (S) telle que $\varphi(t_0) = 0$, alors φ est identiquement nulle.

2° Soit $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n$ des solutions de (S). Montrer que ces solutions sont linéairement dépendantes si et seulement s'il existe $t_0 \in I$ tel que les vecteurs de $\mathbb{R}^n$: $\varphi^1(t_0), \varphi^2(t_0), \ldots, \varphi^n(t_0)$ soient linéairement dépendants.

3° Montrer que l'ensemble des solutions de (S) est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$ dont on donnera une base.

4° Si $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n$ sont des solutions linéairement indépendantes de (S), on note $\Phi(t)$ [respectivement $\Phi'(t)$] l'élément de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont la $k^{ème}$ colonne est formée des composantes de $\varphi^k(t)$ [respectivement $(\varphi^k)'(t)$] sur la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la résolution de (S) équivaut à la résolution de l'équation matricielle

$$(A) \qquad X' = A(t) \cdot X$$

pour laquelle Φ est solution si, pour tout t de I, $\Phi(t)$ appartient à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi'(t) = A(t) \cdot \Phi(t)$.

5° Soit S une application de I dans $M_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout t de I, la matrice $S(t)$ soit inversible. Si on pose $Y = S(t) \cdot X$, déterminer l'équation matricielle

$$(B) \qquad Y' = B(t) \cdot Y$$

que vérifie Y, lorsque X est solution de (A).

6° Dans cette question, $n = 3$ et $I = \mathbb{R}$. Soit

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & \cos t + 2\sin t & -\sin t + 2\cos t \\ 0 & 1 - 3\sin^2 t + 3\sin t\cos t & 1 + 3\cos^2 t - 3\sin t\cos t \\ 0 & -1 - 3\sin^2 t - 3\sin t\cos t & 1 - 3\cos^2 t - 3\sin t\cos t \end{bmatrix}$$

Montrer que l'équation matricielle $X' = A(t) \cdot X$ se transforme en un système néaire à coefficients constants si on pose $Y = S(t).X$ avec

$$S(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Donner la solution générale de l'équation $x' = A(t).x$

III

Dans cette partie, sauf indications contraires, I *est égal à* $\mathbb{R}$. Dans toute cette partie, les a_{ij} sont périodiques de période $\bar{\omega}$. On écrira : A est $\bar{\omega}$-périodique.

1° Montrer que, si Φ est une solution de (A), il existe une matrice constante C_Φ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, inversible telle que, pour tout t,

$$\Phi(t + \omega) = \Phi(t).C_\Phi$$

C_Φ sera dite « matrice de base de la solution Φ ».

Montrer que toute solution ψ de (A) a une matrice de base semblable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ à C_Φ.

2° Soit

$$(A) \quad : \quad X' = A(t).X$$
$$(B) \quad : \quad Y' = B(t).Y$$

où A et B sont $\bar{\omega}$-périodiques. (A) et (B) sont dites « équivalentes » s'il existe une application S de I dans le sous-ensemble de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ constitué par les matrices inversibles $\bar{\omega}$-périodiques, telle que le changement $Y = S(t).X$ transforme (A) en (B). Montrer que (A) et (B) sont équivalentes si et seulement si une solution $X = \Phi(t)$ de (A) et une solution $Y = \psi(t)$ de (B) admettent même matrice de base C_Φ.

3° On suppose que C_Φ est une matrice diagonale. Trouver une matrice B diagonale à coefficients constants réels ou complexes telle que (A) soit équivalente à

$$Y' = B.Y$$

Soit $(z_i)_{i \leq n}$ les éléments diagonaux de B. Montrer que la fonction g définie par $g(t) = e - z_i t\, \varphi^i(t)$ est $\bar{\omega}$-périodique. En déduire des conditions sur les valeurs propres de C_Φ pour que (A) admette des solutions périodiques de période ω ou un multiple de $\bar{\omega}$.

4° Dans cette question et la suivante $n = 2$; l'ensemble I (ce n'est pas un intervalle) sera précisé par les candidats. Soit :

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{\pi^2}{4}\cos^2 t & -\operatorname{tg} t \end{bmatrix}$$

A est π-périodique. Définir une solution Φ de l'équation

$$(A) \qquad X' = A(t).X$$

et déterminer la matrice de base C_Φ de cette solution. Déterminer une matrice B à coefficients constants ou complexes telle que

$$(B) \qquad Y' = B.Y$$

soit équivalente à (A). Quelle est la transformation $Y = S(t).X$ correspondante ?

5° Résoudre les mêmes questions qu'en 4° en considérant que A est 2π-périodique.